Gépi tanulás

Hétköznapi szóhasználatban a *tanulás* azt jelenti, hogy egy feladat megoldásához szabályokat találunk, vagy fedezünk fel. Például egy kisgyermek megtanulhatja, hogy a madaraknak van szárnyuk, és képesek repülni – anélkül, hogy ezt valaki pontos szabályok formájában elmagyarázná neki. A gyerek megfigyelései alapján felismeri a jellemző mintákat és kapcsolatokat, és ez alapján képes új esetekre is következtetni.

Formálisan tekintve, a **gépi tanulás** célja olyan függvény megtalálása, amely egy bemeneti adat alapján megbízhatóan becsli a hozzá tartozó kimenetet . Például ha a bemenet egy rendszámtáblát ábrázoló kép, a kimenet a rajta olvasható szöveg lesz.

Ahhoz, hogy ez megvalósuljon, először is összegyűjtünk egy **tanítóhalmazt**, amely bemeneti és kimeneti adatpárokat tartalmaz:

$$ \mathcal{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\} $$

Ezután definiálunk egy **paraméteres modellt** \(f(x; w) \), ahol:

- \(f \) egy függvény (pl. neurális hálózat),
- \(w \) a tanulható paraméterek összessége (súlyok),

cél, hogy \(f(x_i; w) \approx y_i \) legyen, azaz tetszőlegesen kiválasztott adatpár bemenetére \(x_i\), az \(y_i\) kimenetet adja.

A tanulás célja

A tanulás célja az optimális \(w^* \) paraméter megtalálása, amely mellett a modell jól teljesít. A modell jóságát (teljesítményét) **veszteségfüggvény** segítségével mérjük:

$$ \mathcal{L}(w) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ell(y_n, f(x_n; w)) $$

ahol \(\ell \) például lehet a **négyzetes hiba**, aminek egyik bemenete a tanító halmaz \(y\) kimenetének értékéből kivonja, a modell által számolt \(\hat{y}\) kimenetet és ennek a különbségnek veszi a négyzetét:

$$ \ell(y, \hat{y}) = (y - \hat{y})^2 $$

Ilyenkor a \(\ell \) veszteségfüggvény értéke a négyzetes hibák átlaga. Behelyettesítve:

$$ \mathcal{L}(w) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - f(x_n; w))^2 $$

A tanulás célja, hogy megtaláljuk azt a *paraméterbeállítást*, amely a lehető legjobban teljesít. Ez azt jelenti, hogy olyan **súlyokat** (paramétereket) keresünk, amelyek a lehető legkisebb hibát eredményezik a tanítóadatokon.

Másként fogalmazva: a tanulás során azt a súlyvektort szeretnénk megtalálni \(w^*\), amely minimalizálja a veszteségfüggvényt — vagyis azt, amely mellett a modell becslései a lehető legközelebb esnek a tényleges válaszokhoz az összes tanítópéldára nézve.

$$ w^* = \arg\min_w \mathcal{L}(w) $$

Ez a megközelítés számos alkalmazás alapját képezi: képfelismerés, szövegértés, hangfeldolgozás, játékstratégia stb. A modell nem szabályokat programozva működik, hanem adatokból „tanul meg” viselkedni.

Példa: Egyszerű lineáris modell tanulása

Tegyük fel, hogy a modellünk (becslő függvény) így néz ki:

$$ f(x; w) = wx $$

és két tanítópéldánk van:

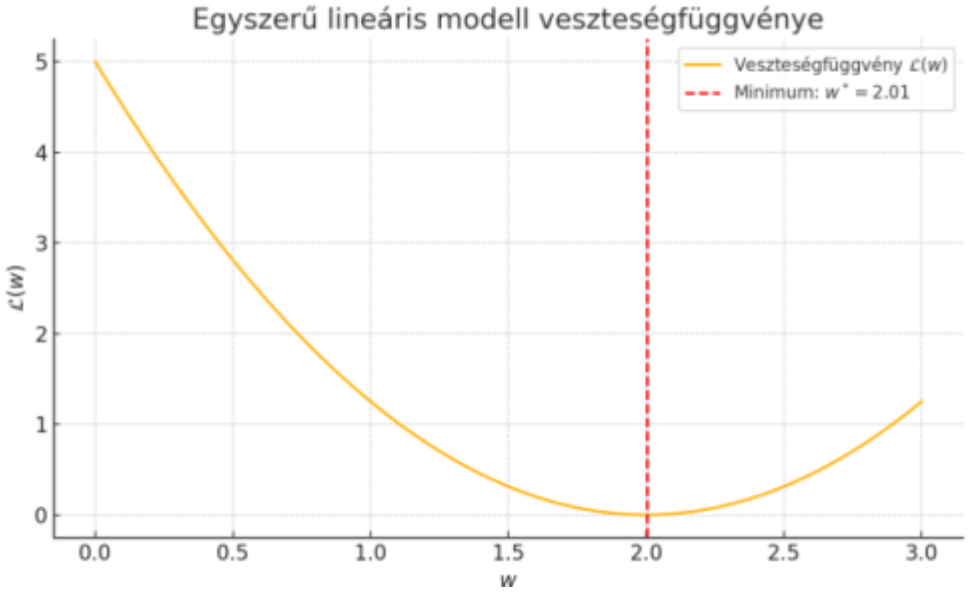
- (1, 2)
- (2, 4)

A cél, hogy olyan \(w \) súlyt találjunk, amely a következő veszteségfüggvényt minimalizálja:

$$ \mathcal{L}(w) = \frac{1}{2}[(2 - w \cdot 1)^2 + (4 - w \cdot 2)^2] $$

Ez a függvény azt méri, hogy adott \(w \) esetén mekkora hibát követ el a modell. Az alábbi ábrán látható a veszteségfüggvény alakja, valamint a minimumhely:

- A minimális veszteség \(\mathcal{L}(w) \approx 0.00 \)
- A hozzá tartozó optimális súly: \(w^* = 2.01 \)



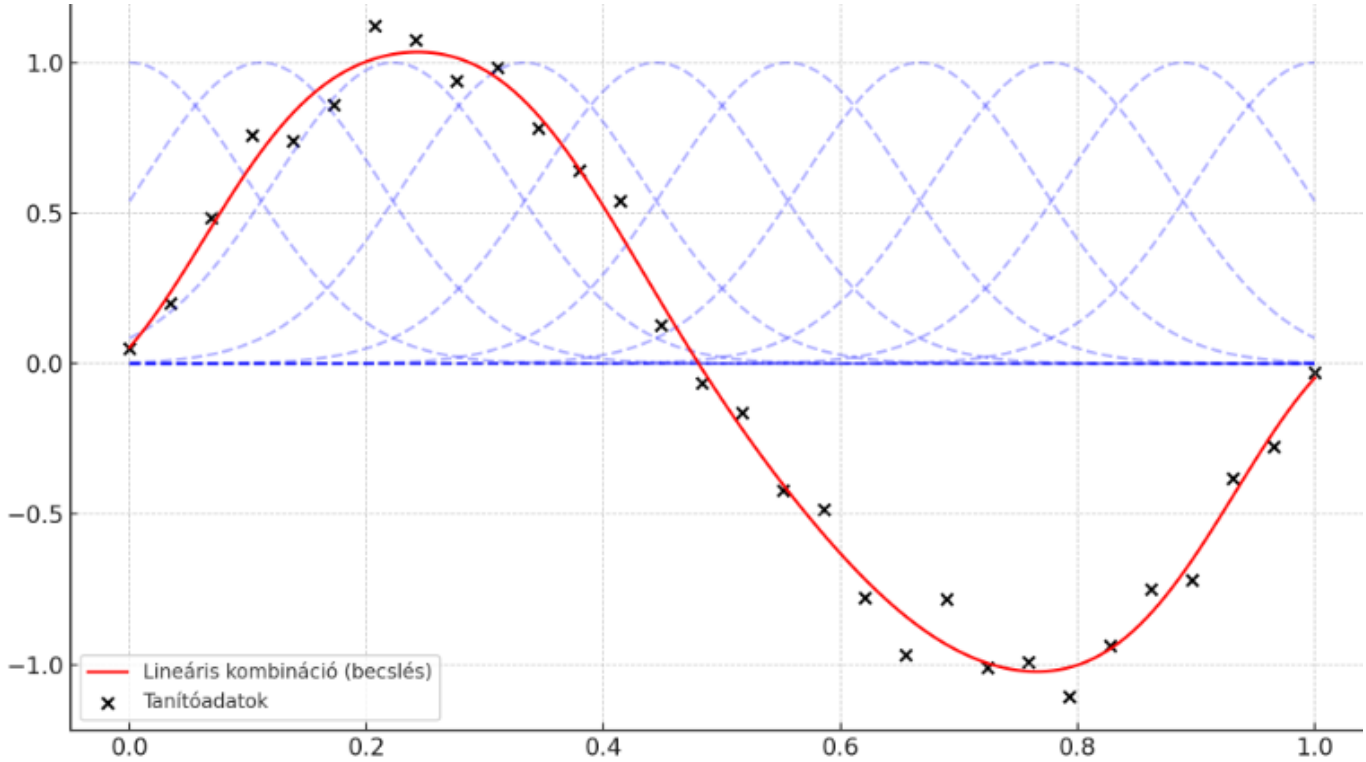
Példa: Összetettebb modell

Legyen a modell több paraméteres:

$$f(x; w) = \sum_{k=1}^K w_k f_k(x)$$

ahol:

- \(f_k(x)\) előre definiált bázisfüggvények (pl. Gauss-görbék, szinuszok, polinomok stb.)



- Fekete pontok: zajos tanítóadatok \((x_n, y_n) \)
- Kék görbék: a 10 darab Gauss-alakú bázisfüggvény \(f_k(x)\)
- Piros görbe: a tanult függvény \(f(x; w^*) = \sum w_k f_k(x) \)

A modell megtanulta, milyen súlyokkal (\(w\)-kel) kombinálja a bázisfüggvényeket úgy, hogy a piros görbe minél jobban kövesse a tanítóadatokat, azaz minimalizálja a négyzetes hibát.

A következő Python program hozta létre a fenti ábrát.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.metrics import mean_squared_error
from scipy.linalg import solve

# 1. Tanítóadat generálása (zajos szinuszgörbe)
np.random.seed(42)
N = 30
x_train = np.linspace(0, 1, N)
y_train = np.sin(2 * np.pi * x_train) + 0.1 * np.random.randn(N)

# 2. Bázisfüggvények: Gauss-görbék
K = 10  # Bázisfüggvények száma
centers = np.linspace(0, 1, K)
width = 0.1

def gaussian_basis(x, c, s):
```

```
    return np.exp(-0.5 * ((x - c)/s)**2)

# 3. Design mátrix Φ (N x K)
Phi = np.stack([gaussian_basis(x_train, c, width) for c in centers], axis=1)

# 4. Optimális súlyok kiszámítása (normálegyenlet)
# Φ w = y  => w = (Φᵗ Φ)⁻¹ Φᵗ y
w_star = solve(Phi.T @ Phi, Phi.T @ y_train)

# 5. Kiértékelés új pontokon
x_test = np.linspace(0, 1, 200)
Phi_test = np.stack([gaussian_basis(x_test, c, width) for c in centers],
axis=1)
y_pred = Phi_test @ w_star

# 6. Eredmény kirajzolása
plt.figure(figsize=(10, 6))
for k in range(K):
    plt.plot(x_test, Phi_test[:, k], '--', color='blue', alpha=0.3)  #
bázisfüggvények

plt.plot(x_test, y_pred, color='red', label='Lineáris kombináció (becslés)')
plt.scatter(x_train, y_train, color='black', label='Tanítóadatok')
plt.title("Basis function regression Gaussian bázisfüggvényekkel")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Underfitting és overfitting (gyenge és túlzott illeszkedés)

A modell kapacitása és a rendelkezésre álló tanítóadatok mennyiségének viszonya fontos szerepet játszik a tanulás sikerességében.

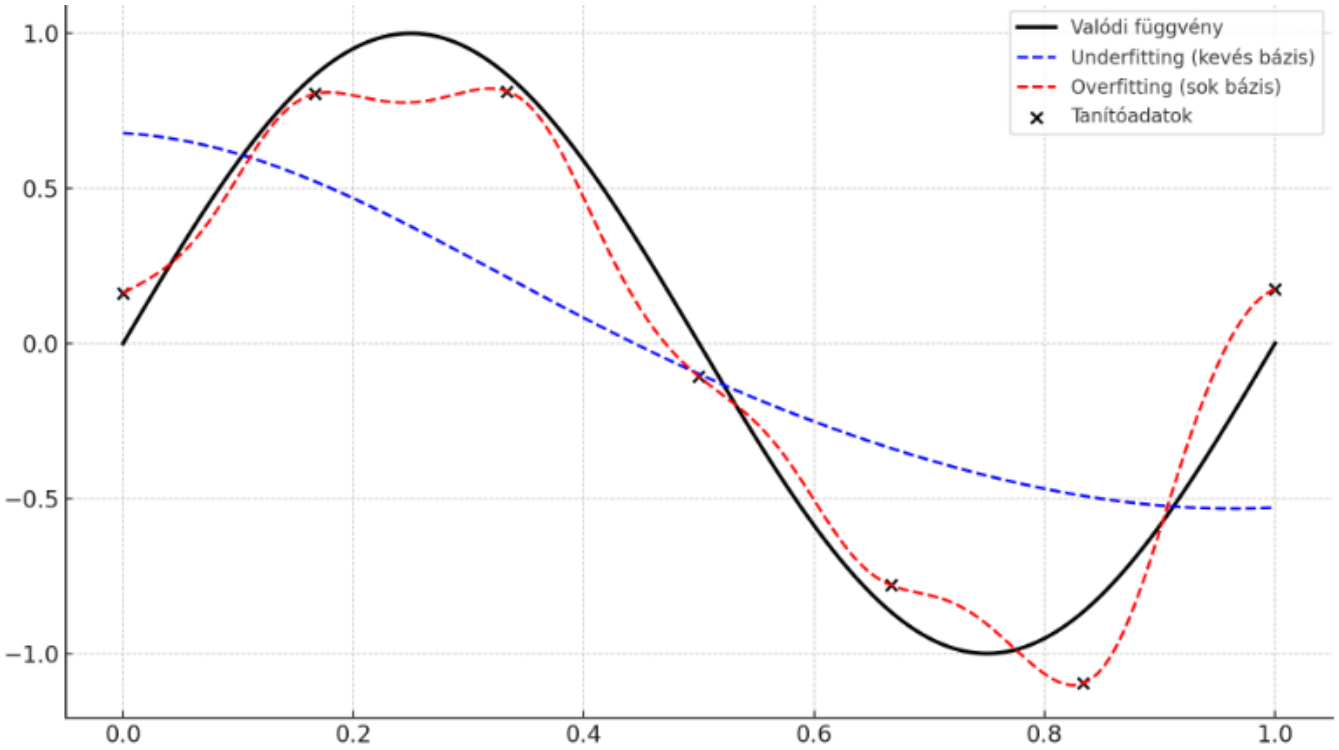
Ha a modell **túl egyszerű** (kevés paramétert vagy kevés bázisfüggvényt használ), akkor nem lesz elég rugalmas ahhoz, hogy megtanulja az adatok mögötti összefüggéseket. Ez az eset az **underfitting** (gyenge illeszkedés): a modell nem tud alkalmazkodni még a tanítóadatokhoz sem, és mind a tanító-, mind a tesztpéldákon nagy hibát vét.

Ezzel szemben, ha a modell **túl bonyolult** (pl. túl sok paraméterrel dolgozik), akkor hajlamos arra, hogy a tanítóadatokra túlzottan “ráilleszkedjen”. Ez az **overfitting** (túlzott illeszkedés), amely során a modell tökéletesen teljesít a tanítóhalmazon, de új, ismeretlen adatokra gyengén általánosít. Megtanulja a tanító halmazban lévő “zajt”, pl. az esetleges hibás vagy kiugró értékeket is.

Az alábbi ábra ezt a jelenséget szemlélteti:

- A fekete vonal a valódi (ismeretlen) függvény, amely szerint az adatok keletkeztek.
- A fekete pontok a tanítópéldák.

- A kék szaggatott görbe egy túl egyszerű modell (underfitting): nem tudja követni a mintát.
- A piros szaggatott görbe egy túltanult modell (overfitting): jól illeszkedik a pontokra, de a valódi görbétől eltér.



Olyan modellt érdemes tervezni, amely **épp elég rugalmas** ahhoz, hogy meg tudja tanulni az adatok szerkezetét, de **nem annyira rugalmas**, hogy a véletlen zajokat is megtanulja.

A következő program hozza létre a fenti ábrát:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Valódi (rejtett) függvény
def true_function(x):
    return np.sin(2 * np.pi * x)

# Tanítóadat
np.random.seed(1)
x_train = np.linspace(0, 1, 7)
y_train = true_function(x_train) + 0.1 * np.random.randn(len(x_train))

# Teszteléshez sűrű intervallum
x_test = np.linspace(0, 1, 300)
y_true = true_function(x_test)

# Gauss bázisfüggvények
def gaussian_basis(x, c, s):
    return np.exp(-0.5 * ((x - c)/s)**2)

def design_matrix(x, centers, width):
```

```
    return np.stack([gaussian_basis(x, c, width) for c in centers], axis=1)

# Underfitting (kevés bázis)
centers_under = np.linspace(0, 1, 3)
Phi_under = design_matrix(x_train, centers_under, 0.3)
Phi_under_test = design_matrix(x_test, centers_under, 0.3)
w_under = np.linalg.lstsq(Phi_under, y_train, rcond=None)[0]
y_under_pred = Phi_under_test @ w_under

# Overfitting (sok bázis)
centers_over = np.linspace(0, 1, 15)
Phi_over = design_matrix(x_train, centers_over, 0.05)
Phi_over_test = design_matrix(x_test, centers_over, 0.05)
w_over = np.linalg.lstsq(Phi_over, y_train, rcond=None)[0]
y_over_pred = Phi_over_test @ w_over

# Ábra
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_test, y_true, color='black', linewidth=2, label='Valódi
függvény')
plt.plot(x_test, y_under_pred, color='blue', linestyle='--',
label='Underfitting (kevés bázis)')
plt.plot(x_test, y_over_pred, color='red', linestyle='--',
label='Overfitting (sok bázis)')
plt.scatter(x_train, y_train, color='black', label='Tanítóadatok')
plt.title("Underfitting és overfitting példája")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

A gépi tanulási modellek fő típusai

A gépi tanulási modelleket három nagy csoportba sorolhatjuk a tanulás célja és a kimenet jellege alapján:

Regresszió

A regressziós feladat célja egy **folytonos mennyiség** becslése. Ilyenkor a modell egy bemenethez $x \in \mathbb{R}^d$ tartozó kimeneti értéket $y \in \mathbb{R}^k$ próbál megjósolni.

Példák:

- Egy tárgy térbeli pozíciójának becslése egy képből.
- Egy hőmérséklet vagy ház árának előrejelzése.

Osztályozás (klasszifikáció)

Osztályozás során a cél az, hogy a modell egy véges számú lehetséges címke (osztály) közül válasszon ki egyet egy adott bemenethez. Azaz:

$$ y \in \{1, 2, \ldots, C\} $$

A modell általában nem közvetlenül egy címkét ad vissza, hanem **pontszámokat vagy valószínűségeket** rendel minden lehetséges osztályhoz:

$$ f(x; w) = \text{softmax}(s_1, s_2, \ldots, s_C) $$

ahol \(s_i \) a \(i \)-edik osztályhoz tartozó nyers pontszám. A predikció:

$$ \hat{y} = \arg\max_{i} f_i(x; w) $$

A tanítóadat itt is \((x_n, y_n) \) párokból áll, de a \(y_n \) most egy osztályindex.

Sűrűségmodellezés

A harmadik kategória a **sűrűségmodellezés**, amelynek célja nem kimeneti érték előrejelzése, hanem **magának az adatnak a valószínűségi eloszlását** megtanulni:

$$ p(x) \approx \hat{p}(x; w) $$

Ilyenkor csak \(x_n \) példák állnak rendelkezésre (nincs hozzájuk tartozó \(y_n \)), és a modell azt próbálja megtanulni, **mennyire jellemzőek** az egyes minták, vagy hogyan lehet **új mintákat generálni** az eloszlásból.

Jellegzetes célfüggvény itt az eloszlás **log-likelihood maximálása**:

$$ \mathcal{L}(w) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \hat{p}(x_n; w) $$

//Felügyelt// és //felügyelet nélküli// tanulás

- A regresszió és osztályozás esetén mindig szükség van egy **célértékre** (\(y \)), ezért ezeket **felügyelt tanulásnak** nevezzük.
- A sűrűségmodellezés során nincs célérték, csak maga az \(x \) szerepel, ezért ez a **felügyelet nélküli tanulás** kategóriájába soroljuk.

Megjegyzés

Ezek a kategóriák **nem zárják ki egymást**. Például:

- Osztályozás megvalósítható regressziós formában is (pontszámokat tanulunk).
- Sűrűségmodellezésből származtathatunk osztályozót (pl. Bayes-szabály szerint).
- Léteznek összetett modellek, amelyek többféle célt is egyszerre tanulnak (pl. képgenerálás és címkézés együtt).