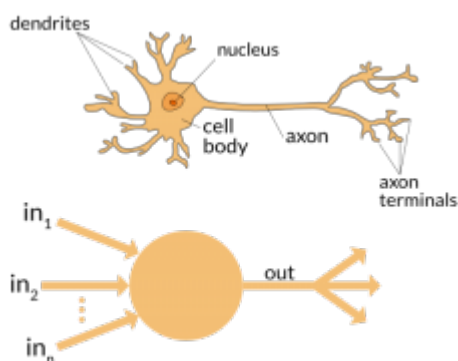


Neurális hálók

Neuron modellezése

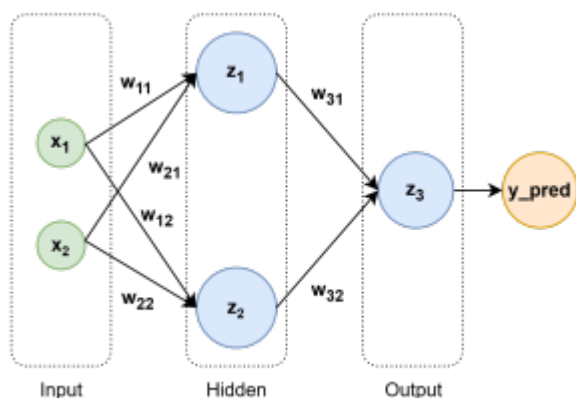
Az alábbi képen a biológiai neuront és annak mesterséges intelligencia modellekben használt analógját látjuk. A biológiai neuron az emberi agy alapvető építőeleme, amely információkat dolgoz fel és továbbít más neuronok felé. A neuron **dendritekkel** rendelkezik, amelyek a környező neuronoktól érkező jeleket fogadják. Ezeket a jeleket a sejt (amelyben a mag található) dolgozza fel, majd továbbküldi az **axonon** keresztül. Az **axon** végén található axon-végződések **szinapszisokon** keresztül kapcsolódnak más neuronokhoz, így biztosítva az információáramlást.



A mesterséges neuron, a fenti biológiai modell alapján működik, leegyszerűsítve annak alapvető működését. A mesterséges neuron bemeneteket fogad, amelyeket (matematikailag) súlyoz (ezzel vezérli a bemenet fontosságát), majd összegez. Az így kapott értéken egy aktivációs függvényt futtat, amely meghatározza, hogy a neuron "tüzel-e", azaz továbbküldi-e a jelet. Az aktivációs függvény eredménye képezi a neuron kimenetét, amelyet továbbít a hálózat következő rétegeinek.

Hálózati Modell

Az alábbi kép egy mesterséges neurális hálózat egyszerű modelljét ábrázolja.



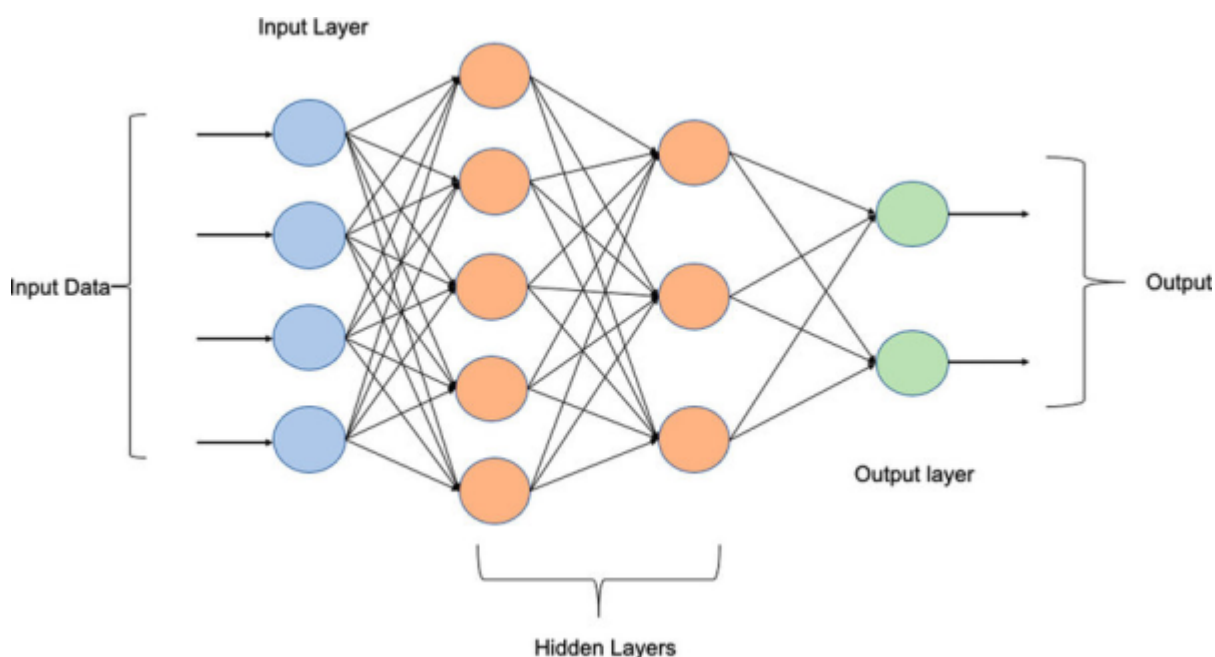
A hálózat bemeneti réteggel indul, amely a zöld színű x_1 és x_2 elemeket tartalmazza. Ezek a bemeneti változók képviselik azokat az adatokat, amelyeket a modell feldolgoz. A bemeneteket súlyokkal szorozzák, majd átadják a rejtett rétegek neuronjaiba, amelyeket a kék színű z_1 , z_2 és z_3 jelöl.

A *rejtett réteg(ek)ben* minden neuron kiszámítja a saját kimenetét egy **aktivációs függvény**

segítségével, amely a bemeneti jelek összegét alakítja át (nemlineáris módon). Ezek a kimenetek aztán tovább haladnak a következő rétegekbe (a példában csak 1 rejtett réteget használunk, ezért itt nincs továbbadás), míg végül eléri a kimeneti réteget, amelyet itt az **y_pred** (y predikció) narancssárga elem jelöl.

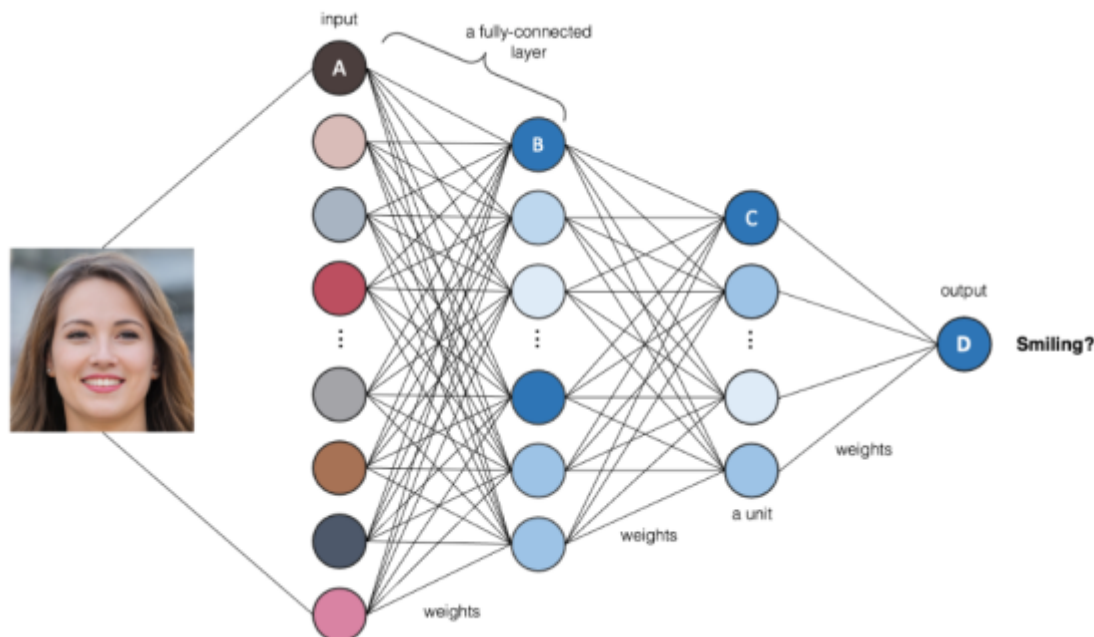
Az **y_pred** a modell végső előrejelzése, egy számérték, amely például egy *osztályozási* vagy *regressziós* (közelítési) probléma megoldásaként jelenik meg.

Ez az ábra segít megérteni a neurális hálózatok alapvető működési elvét: a bemenetek fokozatos átalakulását a különböző rétegeken keresztül, amelyek végül egy konkrét kimeneti értékhez vezetnek. Ezt a folyamatot a gépi tanulás során finoman hangolják (optimalizálják), például *visszaterjesztés* (backpropagation) és *gradienscsökkentés* (gradient descent) segítségével, hogy a modell pontos előrejelzéseket tudjon adni.

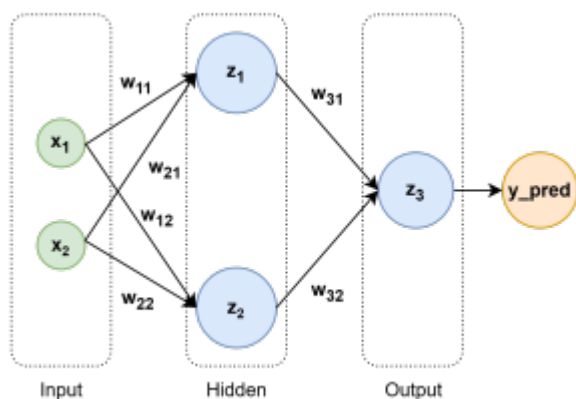


Ha egy kép a bement, akkor a pixeleit sorban is be lehet adni a hálónak (nem vesszük figyelembe, hogy a kép téglalap). A finomhangolás során - a bemutatott minták alapján - a háló megtanulja a pixelek közötti összefüggéseket, és választ tud majd adni, hogy mosolyog-e a képen látható személy, egy olyan képen is, amit korábban nem mutattak meg a hálónak (a modellnek). Megjegyzés: olyan modellek természetesen jobban működnek, amik figyelembe veszik a szomszédos pixeleket is (pl. konvolúciós hálók).

Az ábrán, a *fully-connected* layer azt jelenti, hogy a minden bementi neuron minden a következő réteg minden neuronjával össze van kapcsolva.



Modell paramétereinek kiszámítása



A neurális hálót, az összeköttetéseihez rendelt súlyok segítségével tudjuk használni. A bemenetből és a rejtett réteg két neuronjának (z_1) és (z_2) értékét az alábbi képlettel számolhatjuk:

$$z_1 = x_1 \cdot w_{11} + x_2 \cdot w_{21} \quad z_2 = x_1 \cdot w_{12} + x_2 \cdot w_{22}$$

A rejtett réteg teljesen összekötött (fully connected), ezért minden bemenet kapcsolódik minden rejtett neuronhoz.

A következő kimeneti réteg $(z_3 = y_{\text{pred}})$ értékét, ami egyetlen neuronból áll így számíthatjuk:

$$z_3 = z_1 \cdot w_{31} + z_2 \cdot w_{32}$$

Egyben ez lesz a háló előrejelzése (y_{pred}) .

Mátrixok alkalmazása háló modellekben

A fenti képleteket mátrixos és vektoros formában is felírhatjuk:

Rejtett réteg súlymátrixa: $(W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix})$

A kimeneti réteg vektor: $(W_2 = \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \end{bmatrix})$

Bemeneti és rejtett réteg vektorok: $(\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})$

Ezek alapján a rejtett réteget a bement és a súlymátrix alapján így számolhatjuk:

$$\mathbf{z} = W_1 \cdot \mathbf{x}$$
 behelyettesítve:
$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A kimenet eredménye egy számérték (skalár) lesz:

$$y_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Teljes mátrixos formában:

$$y_{\text{pred}} = W_2 \cdot W_1 \cdot \mathbf{x}$$

Példa konkrét számértékekkel

Tegyük fel hogy:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Rejtett réteg számítása:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.5 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.6) \\ (0.2 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.58 \end{bmatrix}$$

Kimeneti réteg számítása:

$$y_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.58 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = (0.58 \cdot 0.6 + 0.58 \cdot 0.4) = 0.58$$

A súlyok módosítása a hiba függvényében

“**Loss**” a neurális háló teljesítményének mérésére szolgáló függvény, amely azt jelzi, hogy a háló által számolt kimenetek mennyire térnek el a várt kimenetektől.

$$\text{Loss} = \frac{1}{2} (y - y_{\text{pred}})^2$$

Loss Deriváltja a Kimeneti Réteg Súlyaira

A *back-propagation* során a Loss függvény deriváltját (gradiensét) használjuk a súlyok frissítéséhez.

$$\frac{\partial \text{Loss}}{\partial w_{31}} = \frac{\partial \text{Loss}}{\partial y_{\text{pred}}} \cdot \frac{\partial y_{\text{pred}}}{\partial w_{31}}$$

1.) Első tényező: $\left(\frac{\partial \text{Loss}}{\partial y_{\text{pred}}} \right)$ a Loss függvény deriváltja a (y_{pred}) -re:

$$\frac{\partial \text{Loss}}{\partial y_{\text{pred}}} = -(y_{\text{true}} - y_{\text{pred}}) = -e$$

ahol $(e = y - y_{\text{pred}})$ a hiba.

2.) Második tényező: $\left(\frac{\partial y_{\text{pred}}}{\partial w_{31}} \right)$

Az (y_{pred}) függ a rejtett kimenettől (z_1) :

$$y_{\text{pred}} = z_1 \cdot w_{31} + z_2 \cdot w_{32}$$

Ezért:

$$\frac{\partial y_{\text{pred}}}{\partial w_{31}} = z_1$$

Teljes derivált:

Összekapcsolva a két tényezőt:

$$\frac{\partial \text{Loss}}{\partial w_{31}} = -e \cdot z_1$$

hasonlóan:

$$\frac{\partial \text{Loss}}{\partial w_{32}} = -e \cdot z_2$$

3.) Gradiens a kimeneti súlyokra (W_2)

A súlyok gradiensének mátrixos formája:

$$\Delta W_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Loss}}{\partial w_{31}} \\ \frac{\partial \text{Loss}}{\partial w_{32}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \cdot e \\ z_2 \cdot e \end{bmatrix}$$

A kimeneti réteg hibáját (e) visszatérjesztjük a rejtett réteg neuronjaira (h_1, h_2) :

$$\Delta_{\text{hidden}} = \begin{bmatrix} e \cdot w_{31} \\ e \cdot w_{32} \end{bmatrix}$$

Ez a rejtett réteg hibája.

A bemeneti réteg és a rejtett réteg közötti súlyok gradiensét a bemenetek x és a rejtett réteg hibájának (δ_{hidden}) szorzata adja:

$$\Delta W_1 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot \delta_{z_1} & x_1 \cdot \delta_{z_2} \\ x_2 \cdot \delta_{z_1} & x_2 \cdot \delta_{z_2} \end{bmatrix}$$

ahol: $\delta_{z_1} = e \cdot w_{31}$, $\delta_{z_2} = e \cdot w_{32}$

A súlyok frissítését a gradiensek $(\Delta W_1, \Delta W_2)$ és a tanulási ráta (η) segítségével frissítjük:

$$W_1 = W_1 - \eta \cdot \Delta W_1 \quad W_2 = W_2 - \eta \cdot \Delta W_2$$

A teljes eljárás c implementációja:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

// Adatok (bemenetek és várt kimenetek)
#define INPUT_NODES 2
#define HIDDEN_NODES 2
#define OUTPUT_NODES 1
#define SAMPLES 3
#define EPOCHS 1000
#define LEARNING_RATE 0.01

// Adatok és súlyok inicializálása
double inputs[SAMPLES][INPUT_NODES] = {
    {0.3, 0.1},
    {0.8, 0.6},
    {0.5, 0.5}
};
double expected_outputs[SAMPLES][OUTPUT_NODES] = {
    {0.2},
    {0.7},
    {0.5}
};

// Súlyok
double weights_input_to_hidden[INPUT_NODES][HIDDEN_NODES];
double weights_hidden_to_output[HIDDEN_NODES][OUTPUT_NODES];

// Véletlen szám generálása 0 és 1 között
```

```
double random_double() {
    return (double)rand() / RAND_MAX;
}

// Forward pass függvény: Egyetlen minta alapján kiszámítja a kimenetet
void forward_pass(double *input, double *hidden_output, double
*final_output,
                double *weights_input_to_hidden, double
*weights_hidden_to_output) {
    // 1. Bemenet -> Rejtett réteg
    for (int i = 0; i < HIDDEN_NODES; i++) {
        hidden_output[i] = 0.0;
        for (int j = 0; j < INPUT_NODES; j++) {
            hidden_output[i] += input[j] * weights_input_to_hidden[j *
HIDDEN_NODES + i];
        }
    }

    // 2. Rejtett réteg -> Kimeneti réteg
    for (int i = 0; i < OUTPUT_NODES; i++) {
        final_output[i] = 0.0;
        for (int j = 0; j < HIDDEN_NODES; j++) {
            final_output[i] += hidden_output[j] * weights_hidden_to_output[j
* OUTPUT_NODES + i];
        }
    }
}

// Súlyok frissítése
void update_weights(double *weights, double *gradients, int rows, int cols)
{
    for (int i = 0; i < rows; i++) {
        for (int j = 0; j < cols; j++) {
            weights[i * cols + j] += LEARNING_RATE * gradients[i * cols +
j];
        }
    }
}

int main() {
    // Véletlenszerű súlyok inicializálása
    for (int i = 0; i < INPUT_NODES; i++) {
        for (int j = 0; j < HIDDEN_NODES; j++) {
            weights_input_to_hidden[i][j] = random_double();
        }
    }
    for (int i = 0; i < HIDDEN_NODES; i++) {
        for (int j = 0; j < OUTPUT_NODES; j++) {
            weights_hidden_to_output[i][j] = random_double();
        }
    }
}
```

```
double hidden_layer_output[HIDDEN_NODES];
double output[OUTPUT_NODES];
double error[OUTPUT_NODES];

// Tanítási ciklus
for (int epoch = 0; epoch < EPOCHS; epoch++) {
    double total_loss = 0.0;

    for (int sample = 0; sample < SAMPLES; sample++) {
        // 1. Forward pass egy mintára
        forward_pass((double *)inputs[sample], hidden_layer_output,
output,
                    (double *)weights_input_to_hidden, (double
*)weights_hidden_to_output);

        // 2. Hibaszámítás
        for (int i = 0; i < OUTPUT_NODES; i++) {
            error[i] = expected_outputs[sample][i] - output[i];
            total_loss += error[i] * error[i];
        }

        // 3. Visszaterjesztés (backpropagation)
        double gradients_hidden_to_output[HIDDEN_NODES][OUTPUT_NODES] =
{0};
        for (int i = 0; i < HIDDEN_NODES; i++) {
            for (int j = 0; j < OUTPUT_NODES; j++) {
                gradients_hidden_to_output[i][j] =
hidden_layer_output[i] * error[j];
            }
        }

        double gradients_input_to_hidden[INPUT_NODES][HIDDEN_NODES] =
{0};
        for (int i = 0; i < INPUT_NODES; i++) {
            for (int j = 0; j < HIDDEN_NODES; j++) {
                double back_error = 0.0;
                for (int k = 0; k < OUTPUT_NODES; k++) {
                    back_error += error[k] * weights_hidden_to_output[j
* OUTPUT_NODES + k];
                }
                gradients_input_to_hidden[i][j] = inputs[sample][i] *
back_error;
            }
        }

        // 4. Súlyok frissítése
        update_weights((double *)weights_hidden_to_output, (double
*)gradients_hidden_to_output, HIDDEN_NODES, OUTPUT_NODES);
        update_weights((double *)weights_input_to_hidden, (double
```



```
*)gradients_input_to_hidden, INPUT_NODES, HIDDEN_NODES);
    }

    // Hiba kiírása minden epoch után
    if (epoch % 100 == 0) {
        printf("Epoch %d, Loss: %.4f\n", epoch, total_loss / SAMPLES);
    }
}

// Eredmények kiírása tanító adatokon
printf("\nVégső kimenetek tanítás után:\n");
for (int sample = 0; sample < SAMPLES; sample++) {
    forward_pass((double *)inputs[sample], hidden_layer_output, output,
        (double *)weights_input_to_hidden, (double
*)weights_hidden_to_output);

    printf("Bemenet: [%.2f, %.2f], Várt: %.2f, Kimenet: %.4f\n",
        inputs[sample][0], inputs[sample][1],
expected_outputs[sample][0], output[0]);
}

// Tesztelés új bemenetekkel
double test_inputs[3][INPUT_NODES] = {
    {0.4, 0.6}, // Átlag: 0.5
    {0.2, 0.8}, // Átlag: 0.5
    {0.9, 0.1} // Átlag: 0.5
};

printf("\nTeszt kimenetek:\n");
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    forward_pass((double *)test_inputs[i], hidden_layer_output, output,
        (double *)weights_input_to_hidden, (double
*)weights_hidden_to_output);

    double expected = (test_inputs[i][0] + test_inputs[i][1]) / 2.0; //
A bemenetek átlaga
    printf("Bemenet: [%.2f, %.2f], Várt (átlag): %.2f, Kimenet: %.4f\n",
        test_inputs[i][0], test_inputs[i][1], expected, output[0]);
}

return 0;
}
```

From:

<https://edu.iit.uni-miskolc.hu/> - Institute of Information Science - University of Miskolc

Permanent link:

https://edu.iit.uni-miskolc.hu/muszaki_informatika:neuralis_halok_alapjai?rev=1733397513

Last update: **2024/12/05 11:18**

