Statisztikus tulajdonságok

Kísérletek kimenetele, megfigyelések eredménye, rendszerek állapota, **eseményteret** alkot, amelyben véges vagy végtelen számosságú elemi esemény következhet be. A bekövetkezett események halmazokat alkotnak. Mivel az események **halmazok**, az eseményekkel halmazműveleteket végezhetünk. Az események bekövetkezése információt hordoz. Mindennapi tapasztalat szerint az események bekövetkezésének hírértéke nagyon különböző lehet.

Pl.: ha azzal a hírrel fogadnak, hogy 5 találatom van a lottón, ennek az információnak sokkal nagyobb a hírértéke, mint ha 1 találatom van.

Kísérletek kimenetelét megfigyelve azt tapasztaljuk, hogy az egyes események gyakorisága stabilitást mutat. Ha az E eseménytérben k számú megfigyelést végezve az E_i esemény k_i-szer következett be, akkor az esemény g_i gyakorisága: $g_i = \frac{k_i}{k}$.

Ez nem más, mint a E_i esemény bekövetkezéseinek a száma k_i osztva az összes elvégzett megfigyelés számával k.

Nagyszámú kísérlet esetén ez a gyakoriság, definíció szerint az E_i esemény valószínűségéhez tart:

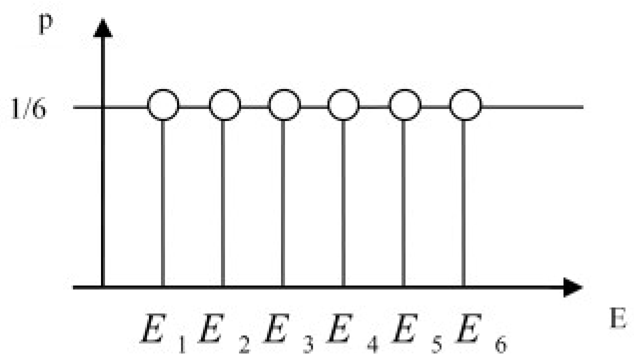
$\lim \limits_{k \to \infty} g_i = \frac {k_i}{k} = p(E_i) ,$

- ha $k_i = k$, akkor az esemény bekövetkezése biztos, azaz $p(E) = 1$
- ha $k_i = 0$, akkor az esemény bekövetkezése lehetetlen, azaz $p(E) = 0$

Az E esemény $p(E)$ valószínűsége a bekövetkezés gyakoriságának mértéke.

Példa

Pl.: a szabályos dobókocka feldobása, mint véletlen eseményhalmaz minden esemény egyhatod valószínűségű, amit ábrával is kifejezhetünk:



A kockadobás dobásai úgynevezett **teljes eseményrendszer**t alkotnak. A **teljes eseményrendszer** fontos tulajdonsága, hogy az egyes események valószínűségeinek összege 1 és egy esemény bekövetkezése kizárja az összes többit.

$$ \sum\limits_{i=1}^n p(E_i) = 1, $$

ahol $E_i \cap E_j = 0$ és $i \neq j$.

A kockadobás teljes eseményrendszerének halmaza hatféle, egyenként egyhatod valószínűségű eseményt tartalmaz. A kizárást az fejezi ki, hogy két különböző esemény metszete mindig 0.

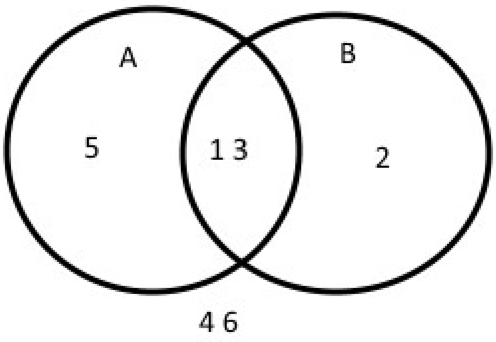
Az összeg valószínűsége

Két fontos szabály, összetett események valószínűségével kapcsolatosan:

Feltehetjük a kérdést, hogy mekkora a valószínűsége két esemény valószínűségeinek az összege? Például mekkora a valószínűsége, hogy a dobókockával páratlant dobunk (A esemény) és annak, hogy négynél kisebbet dobunk (B esemény)?

A páratlan dobás valószínűsége három hatod, mert 6 esetből 3-szor tudunk páratlant dobni. Négynél kisebbet ugyancsak három hatod valószínűséggel dobhatunk hiszen itt az 1 és 2 és 3 dobása számít. Mondhatjuk tehát, hogy ezek szerint az összegzett valószínűség 1? Azaz a két esemény teljes eseményteret alkot?

Nem mondhatjuk. Mivel ha egyet és hármat dobunk, az mindkét eseményhez hozzátartozik.



Ha A és B eseménynek nem lenne közös halmaza, azaz egymást kizáró események lennének, akkor a

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Viszont általános képletet (képet) csak úgy alkothatunk, ha a két esemény metszetének valószínűségét levonjuk az összegből:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

A képlet alapján a két esemény valószínűségének összege négy hatod.

Példa

Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kockával kétszer dobva mindkét esetben hatost dobunk?

A hatos dobás egyhatod valószínűségű, de nem vághatjuk rá, hogy összeadjuk kétszer és így kéthatod valószínűség lesz a megoldás. Ez azért van így, mert az események függetlenek. A két dobás között nincs összefüggés, független eseményeknek kell tekintenünk. Ilyenkor az eredmény a két esemény szorzata, azaz

$p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ lesz.

Feltételes valószínűség

Hogyan tudjuk számolni azt az esetet, amikor két esemény nem független? Azaz ha az egyik bekövetkezik, akkor annak bekövetkezése hatással van a másik bekövetkezésére.

a A és B olyan összetett események, a melyek nem zárják ki egymást. Ilyenkor létezik az A esemény B eseményre vonatkozó **feltételes valószínűség**e.

Jelölése: $p(A | B)$

Ez alatt azt a relatív gyakoriságot értjük, amely az együttes bekövetkezések számát a B esemény bekövetkezési számához viszonyítja.

$p(A | B) = \frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{ \frac {k_{AB}}{k} } { \frac{k_B}{k} } = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

amiből következik, hogy:

$p(A \cap B) = p(A | B) \cdot p(B)$

Példa

Egy gyártandó tengely két fontos mérete a hossz (L) és az átmérő (D). A méretekre $\Delta\pm L$ és $\Delta\pm D$ eltérés (tűrés) van megengedve. Ellenőrizve 180 alkatrészt, az eredmény a következő:

Mérési eredmény	Darab
Hibátlan (H)	162
Az L mérete hibás (A)	10
A D mérete hibás (B)	12
Mindkét mérete hibás $A \cap B$	4
Csak az L mérete hibás (C)	6
Csak az D mérete hibás (C)	8

Mennyi az A és B események valószínűsége?

Az **A** “hossza hibás” esemény valószínűsége:

$p(A) = \frac {10}{180} = 0.0555$

A **B** “átmérője hibás” esemény valószínűsége:

$p(B) = \frac {12}{180} = 0.0666$

Mekkora a valószínűsége, hogy mindkét méret hibás?

A “mindkét méret hibás” esemény valószínűsége:

$p(A \cap B) = \frac {4}{180} = 0.0222$

Mekkora a valószínűsége, hogy egy tengely hossza akkor hibás, ha már az átmérője is hibás volt?

Az együttes bekövetkezést a feltételes valószínűség definíciójából számolhatjuk:

$p(A | B) = \frac{\text{mindkét méret hibás}}{\text{az átmérő hibás}} = \frac{4}{12} = 0.333$. Mivel ez nem egyezik meg a $p(A) \cdot p(B)$ szorzatával, így kijelenthetjük, hogy a két esemény nem független!