Bináris aritmetika

Bevezetés

Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipcse, 1646. július 1. – Hannover, 1716. november 14.) polihisztor: jogász, diplomata, történész, matematikus, fizikus és filozófus egyszerre. Nagy Frigyes azt mondta róla: „önmagában egy akadémia”.

Leibniz a XVII. század vége és a XVIII. század eleje között alkotott, egyike volt a német felvilágosodás alapítóinak. Newtontól függetlenül létrehozta a matematikai analízist. Leibniz hozzájárult a formális logika megteremtéséhez, az univerzális, tudományos kalkulus bevezetésével - Descartes-hoz hasonlóan - az általános megismerési módszert kereste.

A kettes számrendszer pontos leírását is ő adta meg először az Explication de l'Arithmétique Binaire című könyvében.

86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

TABLE DES NOMBRES.

000000	0
000001	1
000010	2
000011	3
000100	4
000101	5
000110	6
000111	7
001000	8
001001	9
001010	10
001011	11
001100	12
001101	13
001110	14
001111	15
010000	16
010001	17
010010	18
010011	19
010100	20
010101	21
010110	22
010111	23
011000	24
011001	25
011010	26
011011	27
011100	28
011101	29
011110	30
011111	31
100000	32
&c.	&c.

bres entiers au-deſſous du double du plus haut degré. Car icy, c'eſt comme ſi on diſoit, par exemple, que 111 ou 7 eſt la ſomme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 eſt la ſomme de huit, quatre & un. Cette proprieté ſert aux Eſſayeurs pour peſer toutes ſortes de maſſes avec peu de poids, & pourroit ſervir dans les monnoyes pour donner pluſieurs valeurs avec peu de pieces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	
1	1
1101	13

Cette expreſſion des Nombres étant établie, ſert à faire tres-facilement toutes ſortes d'operations.

Pour l'*Addition* par exemple. ☽

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la *Souſtraction.*

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la *Multiplication.* ⊙

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la *Diviſion.*

15	1111	101	5
3	1111		
	11		

Et toutes ces operations ſont ſi aiſées, qu'on n'a jamais beſoin de rien eſſayer ni deviner, comme il faut faire dans la diviſion ordinaire. On n'a point beſoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut ſçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris enſemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, ſuivant la Table *d'une fois un eſt un*, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela ſe trouve & ſe prouve de ſource, comme l'on voit dans les exemples précedens ſous les ſignes ☽ & ⊙.

Az alapvető matematikai műveleteket bináris számokkal is elvégezhetjük. A bináris elven működő számítógépek is ilyen módon működnek.

A digitális számítógépekben az Aritmetikai és Logikai Egység (Arithmetical Logical Unit, ALU) végzi ezeket a műveleteket.

Ebben a leckében áttekintjük és példával megmutatjuk a:

- bináris összeadást,
- bináris kivonást,
- bináris szorzást.

Bináris összeadás

Ha két egybites számot összeadunk, a kimenetel négyféle lehet:

$0 + 0 = 0 \\ 1 + 0 = 1 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 1 = 10$

Az összeadást ugyanúgy végezzük, mint tízes számrendszerben. Az egyes helyi-értéktől kezdve összeadjuk a biteket és folytatjuk a magasabb helyi-értékek felé.

Látható, hogy az eredmény nem minden esetben fér el egy biten. Amikor az összeadáskor olyan eredményt kapunk, amelyiknél átvitel van, akkor egy bit túlcsordul a magasabb helyi-érték irányában. Tulajdonképpen a fenti táblázatot ki kell egészítenünk úgy, hogy a két bit összeadásakor a túlcsordulás bitet is figyelembe vesszük.

$0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 1 = 1 \\ 0 + 1 + 0 = 1 \\ 0 + 1 + 1 = 10 \\ 1 + 1 + 1 = 11$

Példa

```
 1001101
+0010010
--------
 1011111
```

Az összeadást ugyanúgy végezzük, mint tízes számrendszerben. Az egyes helyi-értéktől kezdve összeadjuk a biteket és folytatjuk a magasabb helyi-értékek felé.

Példa átvitelbittel 1.

```
   11  1   <- Átvitelbitek
  1001001
+ 0011001
---------------
  1100010
```

Ebben a példában már vannak átvitt bitek is, ezeket a legfelső sorban jelöltük kék színnel. Az összeadás itt is ugyanúgy zajlik, mint a tízes számrendszerben.

Példa átvitelbittel 2.

```
     11     <- Átvitelbitek
  1000111
+ 0010110
---------
  1011101
```

Ebben a példában is vannak átvitt bitek. Figyeljük meg, hogy van olyan szituáció, amikor az átvitelbit további helyi-értékek felé csúszik el.

Bináris kivonás

Negatív számok esetén a komplemens alapú számábrázolás az egyik lehetséges számábrázolási forma. Egy bináris szám egyes komplemensét úgy kapjuk meg, hogy megcseréljük a biteket: 0-ból 1 lesz, 1-ből 0.

Például a `1010 0011` bitsorozat egyes komplemense `0101 1100` lesz.

Azért ennek az ábrázolásnak vannak hátrányai. Például a nullát a `0000 0000` és az `1111 1111` egyaránt reprezentálja.

Egy bináris szám kettes komplemensét úgy képezzük, hogy az egyes komplemenshez hozzáadunk egyet.

Tehát legyen az eredeti szám `1010 0011`.

Egyes komplemense `0101 1100`.

Kettes komplemense: `01011100 + 1 = 01011101`.

A kivonás helyett a kivonandó kettes komplemensét adjuk hozzá a kisebbítendőhöz. Vegyünk egy példát:

$7_{(10)}-5_{(10)}$

Binárisan ez így nézne ki: $0111_{(2)}-0101_{(2)}$

Az 5 egyes komplemense 1010, kettes komplemense 1011 A kivonást tehát felcseréljük a kivonandó kettes komplemensének hozzáadásához

```
 0111
+1011
-----
10010
```

Az eredményből egyszerűen elhagyjuk a legnagyobb helyi-értékű bitet. Az eredmény tehát:

$0111_{(2)}-0101_{(2)}= 0010_{(2)}$

$7_{(10)}-5_{(10)} = 2_{(10)}$

Bináris szorzás

```
0101 * 0111
------
0000
 0101
  0101
   0101
------------
 100011
```