

Boole algebra alapjai

Definíció:

a $\{ \{ \{ 0, 1 \} \}^n \}$ alakú függvényeket Boole függvényeknek nevezzük.

A Boole függvényeket felírhatjuk:

$\{ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \}$ alakban. Ezek egy n változós Boole függvényt definiálnak.

A Boole függvényt definiálhatjuk az igazságtáblájával is. Belátható, hogy n bemenet esetén $\{ 2^n \}$ sort tartalmazna ez az igazságtábla.

A bemenetek és kimenetek kapcsolatának leírására Boole egyenleteket használhatunk

Legyen n darab bemenet és m darab kimenet. Ennek a rendszernek a leírásához m egyenlet felírására van szükség.

$$\{ y_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

.

..

...

$$\{ y_m = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

Differencia egyenletek

A következő felírás sorrendiséget is meghatároz. Egy $t+1$ időpontban a rendszer állapotát úgy írhatjuk le, hogy azok a bemenő változók és a kimenő változók egy előző, t . időpontban vizsgált értékének a függvénye.

Ezeket az egyenleteket differencia egyenleteknek nevezzük.

$$\{ y^{t+1}_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y^t_1, y^t_2, \dots, y^t_m) \}$$

.

..

...

$$\{ y^{t+1}_m = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y^t_1, y^t_2, \dots, y^t_m) \}$$

Tulajdonságai

Asszociatív

A Boole algebra asszociatív - csoportosítható - tulajdonsága így írható le:

$$\{(a+(b+c) = (a+b)+c \}$$

$$\{(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \}$$

Kommutatív

A Boole algebra kommutatív tulajdonsága így írható le:

$$\{(a + b = b + a \}$$

$$\{(a \cdot b = b \cdot a \}$$

Elnyelés

Az elnyelési tulajdonság így írható fel:

$$\{(a + (a \cdot b) \equiv a \}$$

$$\{(a \cdot (a + b) \equiv a \}$$

Disztributív

A Boole algebra disztributív tulajdonsága így írható le:

$$\{(a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)\}$$

$$\{(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\}$$

Komplementer

A komplementer képzés így írható le:

$$\{(a + \bar{a} = 1 \}$$

$$\{(a \cdot \bar{a} = 0 \}$$

Idempotencia/korlátosság

$$\{(a + a \equiv a \}$$

$$\overline{a + 0} \equiv a$$

$$\overline{a \cdot a} \equiv a$$

$$\overline{a \cdot 1} \equiv a$$

$$\overline{a + 1} = 0$$

$$\overline{a \cdot 0} = 0$$

de Morgan azonosság

A **de Morgan** azonosságokkal összetett negált kifejezéseket bonthatunk fel. Két azonosságot is felírhatunk:

$$\overline{a + b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b} \equiv \bar{a} + \bar{b}$$

Terjesszük ki az egyenlőséget három változóra:

$$\overline{a + b + c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \bar{a} + \overline{b \cdot c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$$

Ezek az azonosságok tetszőleges sok elemre is érvényben maradnak, beleértve a véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálható I indexhalmazok esetét is:

$$\overline{\sum_{i \in I} A_i} \equiv \prod_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} \equiv \sum_{i \in I} \overline{A_i}$$

Látható, hogy összetett függvényeket úgy negálunk, hogy a VAGY kapcsolatokból ÉS lesz, az ÉS kapcsolatokból VAGY, és minden változót külön invertálnunk kell.

Igazoljuk a de Morgan azonosságokat! Ehhez minden létező kombinációban kiszámítjuk az egyenlet bal és jobb oldalát.

$$\overline{a + b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b}$$

a	b	$\overline{a + b}$	$\overline{\bar{a}}$	\bar{b}	$\bar{a} \cdot \bar{b}$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0

Igazoljuk a de Morgan azonosságokat! Ehhez minden létező kombinációban kiszámítjuk az egyenlet bal és jobb oldalát.

$$\overline{a \cdot b} \equiv \bar{a} + \bar{b}$$

a	b	$\overline{(a \cdot b)}$	\overline{a}	\overline{b}	$\overline{a + b}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

From: <https://edu.iit.uni-miskolc.hu/> - Institute of Information Science - University of Miskolc

Permanent link: https://edu.iit.uni-miskolc.hu/tanszek:oktatas:infrendalapjai_architekturak:logika_alapjai:bool_algebra_alapjai?rev=1731350386

Last update: 2024/11/11 18:39

