Boole algebra alapjai

Definíció:

a $\lbrace0,1\rbrace^n\rightarrow\lbrace0,1\rbrace$ alakú függvényeket Boole függvényeknek nevezzük.

A Boole függvényeket felírhatjuk:

$y=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ alakban. Ezek egy n változós Boole függvényt definiálnak.

A Boole függvényt definiálhatjuk az igazságtáblájával is. Belátható, hogy n bemenet esetén 2^n sort tartalmazna ez az igazságtábla.

A bemenetek és kimenetek kapcsolatának leírására Boole egyenleteket használhatunk

Legyen n darab bemenet és m darab kimenet. Ennek a rendszernek a leírásához m egyenlet felírására van szükség.

$y_1=f(x_1, x_2, ..., x_n)$

.

..

…

$y_m=f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Differencia egyenletek

A következő felírás sorrendiséget is meghatároz. Egy t+1 időpontban a rendszer állapotát úgy írhatjuk le, hogy azok a bemenő változók és a kimenő változók egy előző, t. időpontban vizsgált értékének a függvénye.

Ezeket az egyenleteket differencia egyenleteknek nevezzük.

$y^{t+1}_1=f(x_1, x_2, ..., x_n, y^t_1,y^t_2,...,y^t_m)$

.

..

…

$y^{t+1}_m=f(x_1, x_2, ..., x_n, y^t_1,y^t_2,...,y^t_m)$

Tulajdonságai

Asszociatív

A Boole algebra asszociatív - csoportosítható - tulajdonsága így írható le:

$a+(b+c) = (a+b)+c$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Kommutatív

A Boole algebra kommutatív tulajdonsága így írható le:

$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

Elnyelés

Az elnyelési tulajdonság így írható fel:

$a + (a \cdot b) \equiv a$

$a \cdot (a + b) \equiv a$

Disztributív

A Boole algebra disztributív tulajdonsága így írható le:

$a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Komplementer

A komplementer képzés így írható le:

$a + \bar a = 1$

$a \cdot \bar a = 0$

Idempotencia/korlátosság

$a + a \equiv a$

$a + 0 \equiv a$

$a \cdot a \equiv a$

$a \cdot 1 \equiv a$

$a + 1 =1$

$a \cdot 0 = 0$

de Morgan azonosság

A **de Morgan** azonosságokkal összetett negált kifejezéseket bonthatunk fel. Két azonosságot is felírhatunk:

$\overline {(a + b)} \equiv \bar a \cdot \bar b$

$\overline {(a \cdot b)} \equiv \bar a + \bar b$

Terjesszük ki az egyenlőséget három változóra:

$\overline {(a + b + c)} = (\overline {(a + b) + c}) = \overline{(a+b)} \cdot \bar c = (\bar a \cdot \bar b) \cdot \bar c = \bar a \cdot \bar b \cdot \bar c$

$\overline {(a \cdot b \cdot c)} = \overline{(a \cdot b)} + \bar c = (\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + \bar b + \bar c$

Ezek az azonosságok tetszőleges sok elemre is érvényben maradnak, beleértve a véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálható I indexhalmazok esetét is:

$\overline {\sum_{i \in I}A_i} \equiv \prod_{i \in I} \overline {A_i}$

$\overline {\prod_{i \in I}A_i} \equiv \sum_{i \in I} \overline {A_i}$

Látható, hogy összetett függvényeket úgy negálunk, hogy a VAGY kapcsolatokból ÉS lesz, az ÉS kapcsolatokból VAGY, és minden változót külön invertálnunk kell.

Igazoljuk a de Morgan azonosságokat! Ehhez minden létező kombinációban kiszámítjuk az egyenlet bal és jobb oldalát.

$\overline {(a + b)} \equiv \bar a \cdot \bar b$

a	b	$a+b$	$\overline{(a + b)}$	$\bar a$	$\bar b$	$\bar a \cdot \bar b$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Igazoljuk a de Morgan azonosságokat! Ehhez minden létező kombinációban kiszámítjuk az egyenlet bal és jobb oldalát.

$\overline {(a \cdot b)} \equiv \bar a + \bar b$

a	b	\(a+b\)	\(\overline{(a \cdot b)} \)	\(\bar a\)	\(\bar b\)	\(\bar a + \bar b\)
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0