

Koordináták felcserélés

A koordináták felcserélését közvetlenül elvégezhetjük a következő 2×2 -es mátrix alkalmazásával:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix az alábbiak szerint működik:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Nagyítás és kicsinyítés

A nagyítás és kicsinyítés mátrixa az alábbi. Ha $s_x < 1$ akkor az x tengely irányába kicsinyítés fog történni, ha $s_x > 1$ akkor az x tengely irányába nagyítás. Az s_y esetén is ugyanez a helyzet.

$$M = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Példa: nagyítsuk a síkban a pontokat a kétszeresére:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Síkban eltolás

Az eltolás, vagy transláció, egy geometriai objektum helyzetének megváltoztatása a síkon anélkül, hogy forgatnánk, méreteznénk, vagy torzítnánk azt. Egy pont, vagy egy objektum x, y koordinátáinak eltolásához t_x és t_y értékekkel: x és y tengelyek mentén, a következő transzformációs mátrixot használjuk:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix homogén koordinátákat használ, ami lehetővé teszi az eltolások, forgatások és más transzformációk kombinálását egyetlen műveletben. A transzformáció során egy pont $P(x, y)$ homogén koordinátái $P(x, y, 1)$ lesznek, és az eltolás utáni koordináták a következőképpen számolhatók ki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forgatás Mátrixszal, amikor a forgatási középpont nem az origóban van

Amikor egy pontot vagy objektumot szeretnénk 90 fokkal az óramutató járásával megegyezően elforgatni egy adott $C(x_c, y_c)$ pont körül, a transzformációt három lépésre bonthatjuk:

1. **Eltolás**, hogy a forgatási középpont az origóba kerüljön.

2. **Forgatás** 90 fokkal az óramutató járása szerint.
3. **Visszatolás** a forgatási középpont eredeti helyére.

Ezeket a lépéseket egyetlen 3×3 -as transzformációs mátrixszal kombinálhatjuk, amely így néz ki:

- **Előkészítés eltolással:** $T_{\text{eltolás}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- **90 fokos forgatás:** $T_{\text{forgatás}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- **Visszatolás:** $T_{\text{visszatolás}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A teljes transzformációs mátrix, $T_{\text{teljes}} = T_{\text{visszatolás}} * T_{\text{forgatás}} * T_{\text{eltolás}}$, a következőképpen számítható: (figyeljük meg hogy az egyes mátrixok fordított sorrendben vannak szorozva!)

$$T_{\text{teljes}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ami egyenlő:

$$T_{\text{teljes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x_c - y_c \\ -1 & 0 & y_c - x_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Példa:

Tegyük fel, hogy szeretnénk 90 fokkal az óramutató járásával megegyezően elforgatni egy pontot (például $P(2,3)$) az $(1,1)$ pont körül. Ehhez az előbb leírt transzformációs mátrixokat fogjuk használni. Az egyszerűség kedvéért a példában szereplő értékeket közvetlenül beillesztjük a mátrixokba.

Előkészítés eltolással hogy a forgatási középpont $(-1, -1)$ legyen, azaz eltoljuk a pontot úgy, hogy a forgatási középpont az origóba kerüljön:

$$T_{\text{eltolás}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

90 fokos forgatás ($T_{\text{forgatás}}$), az origó körül:

$$T_{\text{forgatás}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visszatolás ($T_{\text{visszatolás}}$), hogy a forgatási középpont visszakerüljön az eredeti $(1, 1)$ helyére:

$$T_{\text{visszatolás}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A teljes transzformációs mátrix (T_{teljes}) kiszámítása:

$$T_{\text{teljes}} = T_{\text{visszatolás}} * T_{\text{forgatás}} * T_{\text{eltolás}}$$

A számítás eredménye:

$$T_{\text{teljes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Most alkalmazzuk ezt a mátrixot a $P(2,3)$ pontra. A P pontot kiterjesztjük egy homogén koordinátájú ponttá, így $P(2,3,1)$ lesz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 + 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát, az eredeti $P(2,3)$ pont 90 fokkal való elforgatása az $(1,1)$ pont körül az új $(3,0)$ pontba transzformálja azt.

A forgatási mátrixok

A 3D-s forgatásokat forgatási mátrixokkal írhatjuk le. Ezek a mátrixok mutatják, hogyan változik egy pont koordinátája a forgatás során.

X tengely körüli forgatás

A következő képlet az X tengely körüli forgatási mátrixot mutatja, ahol (θ) a forgatás szöge: (a forgatás iránya az óramutató járásával ellentétes)

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Y tengely körüli forgatás

A Y tengely körüli forgatás esetén a forgatási mátrix:

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Z tengely körüli forgatás

Végül a Z tengely körüli forgatás mátrixa:

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

From:

<https://edu.iit.uni-miskolc.hu/> - **Institute of Information Science - University of Miskolc**

Permanent link:

https://edu.iit.uni-miskolc.hu/tanszek:oktatas:muszaki_informatika:transzformacio

Last update: **2024/03/26 19:11**

